Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις. (7) 12-12-19

<u>ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΣ ΜΕ ΣΣ</u>: Η μέθοδος της απαλοιφής

A1 ii) $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 & (1) \\ y_2' = -y_2 \Rightarrow \{y_2(x) = c_2 \cdot e^{-x}\} & (2) \end{cases}$

και μετά κάνουμε αντικατάσταση την (2) στην (1)

$$y_1' - y_1 = -c_2 \cdot e^{-x}$$

$$y_1(x) = e^{x}\left[c_1 + \int (-c_2 \cdot e^{-x}) e^{-x} dx\right]$$

$$\{y_1(x) = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-x}\}$$

$$(y_1(x), y_2(x)) = \left(c_2 \cdot e^{-x}, c_1 \cdot e^{x} + \frac{c_2}{2} e^{-x}\right)$$

A3 i) $\begin{array}{l|} y_1' = y_1 + y_2 + e^{x} \\ y_2' = y_1 - y_2 - e^{x} \end{array}$

$$y_1'' = y_1' + y_2' + e^{x}$$

$$= (y_1 + y_2) + (y_1 - y_2 - e^{x}) + e^{x}$$

$$y_1'' = 2y_1 + e^{x}$$

$$y_1'' - 2y_1 = e^{x}$$

$$y_1'' - 2y_1 = 0 \mid \lambda^2 - 2\lambda = p(\lambda) <^{+\sqrt{2}}_{-\sqrt{2}} \quad \{e^{\sqrt{2}x}, e^{-\sqrt{2}x}\}$$

$$y = z \cdot e^{x}$$

$$z'' \cdot e^{x} + 2z' e^{x} + z e^{x} - 2z \cdot e^{x} = e^{x}$$

$$z'' + 2z' - z = 1 \Rightarrow z = -1$$

$$y_{\mu} = -e^{x}$$

$y_1(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} - e^x$

$y_2 = y_1 - y_1' - e^x$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5:

$y_1' = 2y_1 + y_2 + 3y_3 \rightsquigarrow y_1$ ③

$y_2' = 2y_2 - y_3 \longrightarrow y_2$ ②

$y_3' = 2y_3 \longrightarrow y_3$ ①

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:

$y_1' = y_1 - y_2 - y_3$

$y_2' = y_1 + 3y_2 + y_3$

$y_3' = -3y_1 + y_2 - y_3$

$y_1'' = y_1' - y_2' - y_3' \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1'' = (y_1 - y_2 - y_3) - (y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3)$

$\Rightarrow \boxed{y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - 3y_2 - y_3}$

$y_1''' = 3y_1' - 5y_2' - y_3'$

$\Rightarrow y_1''' = 3(y_1 - y_2 - y_3) - 5(y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3)$

$\Rightarrow \boxed{y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3}$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \\ y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3 \\ y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3 \end{cases}$$

$y_1' = y_1 - y_2 - y_3$

$$\left.\begin{aligned} y_1'' - y_1' &= 2y_1 - 4y_2 \\ -7y_1' + 9y_1''' &= -6y_2 - 12y_2 \end{aligned}\right\} (-3)$$

$-3y_1'' + 3y_1' + y_1' + y_1''' = -12y_1$

$y_1''' - 3y_1'' - 4y_1' + 12y_1 = 0.$

χαρακτ. πολ. $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0.$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda - 3) - 4(\lambda - 3) = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda^2 - 4) = 0 \quad \begin{cases} 3 \\ 2 \\ -2 \end{cases}$

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot e^{2x}.$$

και θα βρούμε τις υπόλοιπες αλγεβρικά.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \\ y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3 \rightarrow y_2 \quad y_3 \end{cases}$$

$$\boxed{y_1'' - y_1' - 2y_1 = -4y_2.}$$

$(y_1, y_2, y_3) = (\ldots, \ldots, \ldots)$

Γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \\ y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3 \\ y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3 \end{cases}$$

άλλος τρόπος λύσης: $y_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1' & -1 & -1 \\ y_1'' & -5 & -1 \\ y_1''' & -19 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & -19 & -7 \end{vmatrix}}$

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

$a_0, a_1, a_2 \in C(I)$ $\qquad x_0, x \in I$.

$a_0(x) \neq 0, \ \forall x \in I$.

$e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds}$ ← το πολλ/με με την εξίσωση.

$$y''(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds} y'(x) + \frac{a_0}{a_1} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds} y(x) =$$

$$P(x)y''(x) + P'(x)y'(x) + \frac{a_0}{a_2}(x)P(x)y(x) = 0.$$

$$[P(x)y'(x)]' + Q(x)y(x) = 0. \quad (\Delta)$$

$P(x) \geq 0$ και παραγ. $P \in C(I)$

Τσεκ. $P'(x)y'(x) + P(x)y''(x) + Q(x)y(x) = 0$.

$$[p(x) \cdot y'(x)]' + Q(x)y(x) = 0$$

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_2}(s) ds} \qquad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} p(x).$$

y_1, y_2 λύσεις → γρ. εξ. $W(y_1,y_2)=0$

→ γρ. ανεξ. $W(y_1,y_2)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1}{a_2}(s)ds}$

$$W(y_1,y_2)\,e^{\int_{x_0}^{x}\frac{a_1}{a_2}(s)ds} = W(x_0) = k$$

$P(x)\cdot[y_1'(x)y_2(x)-y_2'(x)y_1(x)] = k$ (Θεώρημα Abel)

Σελ. 124 (Θ.27)

$\boxed{P(x)\cdot W(x) = k}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 26: Ας είναι $y\neq 0$ μια λύση της (Δ) του I, αν η y μηδενίζεται σε άπειρα σημεία ενός συμπαγούς είναι $J\subseteq I$, τότε $y=0$.

Απόδειξη: y άπειρες ρίζες J συμπαγές

→ σύνολο ριζών της είναι κλειστό και φραγμένο σ.σ.

Έχουμε $x_1, x_2, \dots, x_n \to x_0 \;\|\; y(x_n)=0,\ n\in\mathbb{N}$.

άρα $\lim_{\nu\to} y(x_\nu) = 0 \Rightarrow y(x_0)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (y συνεχής)

$[x_n, x_{n+1}] \sim \exists\, \xi_\nu \in (x_\nu, x_{\nu+1})$ $y'(\xi_\nu)=0$.

$x_\nu < \xi_\nu < x_{\nu+1} \Rightarrow \xi_\nu \to x_0$.

$f'(\xi_\nu)=0\ \forall n\in\mathbb{N}$.

$y(x_0)=0 \quad y'(x_0)=0$.

Στο x_0 έχουμε μηδενικές αρχικές τιμές (Θεώρ. μοναδικότητας)

ΘΕΩΡΗΜΑ 28: Ας είναι y_1, y_2 λύσεις (Δ)

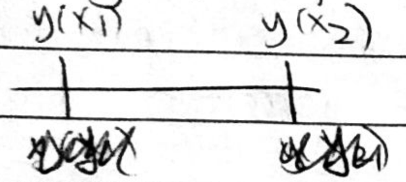
(i) αν ~~[illegible]~~ y_1, y_2 έχουν κοινή ρίζα τότε είναι γρ. εξαρτ

(ii) Αν $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$ γρ. εξαρτημένες τότε έχουν όλες τις ρίζες κοινές.

↳ $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$.

$c_1 \neq 0 \Rightarrow y_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} y_2(x)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 29: ας είναι y_1, y_2 γρ. ανεξ λύσεις της Δ, τότε μεταξύ δυο (οποιεσδήποτε) διαδοχικών ριζών της y_2, υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της y_1.



Έστω ότι η $y_1(x) \neq 0$ $\forall x \in [x_1, x_2]$ αν $y_1(x_1)$ ή $y_1(x_2) = 0$

τότε οι y_1, y_2 είναι γρ. εξαρτ.

ας είναι τώρα $y_1(x) \neq 0$, $x \in [x_1, x_2]$. τότε η

παρ $h(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$, $x \in [x_1, x_2]$

Είναι παραγ. στο $[x_1, x_2]$ με $h(x_1) = h(x_2) = 0$.

⇝ Θ. Rolle $\exists\, p : h'(p) = 0$

δηλ. είναι $y_2(p) - y_1(p) - y_1(p) y_2(p) = 0$.

$W(p) = 0 \Rightarrow y_1, y_2$ γρ. εξ.

$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$y(0) = 2 \rightsquigarrow \boxed{C_2 = 2}$
$y(\pi) = 1 \rightsquigarrow \boxed{-C_2 = 1}$ $\Big\}$ Δεν υπάρχει λύση στο πρόβλημα.

Αν είχαμε άλλες συνθήκες $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\Rightarrow C_2 = 1$ και $C_1 = 1$. υπάρχει λύση.

$y(0) = 2$ και $y(\pi) = -2$

$C_2 = 2$ και $y(\pi) = C_1 \sin\pi + (-2) \cdot$

$C_1 \sin x - 2\cos x$

Έχουμε 3 διαφορετικά συμπεράσματα ανάλογα με τις συνοριακές τιμές που δίνονται

$y'' + \lambda y = 0$ $\quad \underset{\alpha}{|}\!\!-\!\!\underset{b}{|}$

$\Big\{$ $\alpha_1 y(\alpha) + \alpha_2 y'(\alpha) + B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0.$
α_1 ...